Correction TD 28/01 :

Exercice 22 :

1) Pour calculer la loi de X^2, on va utiliser les fonctions tests, c'est-à-dire calculer $\mathbb{E}(h(X^2))$ pour h continue bornée :

soit $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}(h(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) \underbrace{f_X(x)}_{\text{densité de } X} dx$$

Puisque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\mathbb{E}(h(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

On veut faire le changement de variable $y = x^2$. Pour qu'il soit bijectif, on utilise d'abord la parité de l'intégrande :

$$\mathbb{E}(h(X^2)) = 2\int_0^{+\infty} h(x^2)\,\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} h(y)\,\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}\,.$$

$$= \int_0^{+\infty} h(y)\,\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\,dy\,.$$

On peut donc identifier : la loi de X^2 est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$y \longmapsto \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\,.$$

Exercice 25:

Loi zêta de paramètre s:

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{\zeta(s)} n^{-s}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Soit $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}(X^p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) n^p$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-s}.$$

La série converge si et seulement si

$$p-s < -1, \text{ ie } p < s-1.$$

Pour le cas continu, soit donc X de densité

$$f_\alpha : x \mapsto (-1-\alpha)\, x^\alpha \mathbb{1}_{x \geqslant 1} \quad (\alpha < -1).$$

On a bien

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = (-1-\alpha)\left[\frac{1}{1+\alpha} x^{\alpha+1}\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1.$$

Soit $p \geqslant 1$.

$$\mathbb{E}(X^p) = \int_1^{+\infty} x^p f_\alpha(x)\,dx$$

$$= (-1-\alpha)\int_1^{+\infty} x^{p+\alpha}\,dx.$$

Donc $\mathbb{E}(X^p) < +\infty$ si et seulement si

$$p+\alpha < -1, \text{ ie } p < -1-\alpha.$$

À RETENIR :

$$X \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(h(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \mathbb{P}(X = n)$$

X de densité f : $\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx$.

Si c'est défini !! Pour montrer que c'est défini, on regarde d'abord

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| \mathbb{P}(X = n)$$

ou $\int_{\mathbb{R}} |h(x)| f(x) \, dx$,

qui sont toujours définies dans $[0, +\infty]$.

Exercice 26 :

1) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, soit $t \in [0,1]$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \underbrace{\mathbb{P}(X=n)}_{= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \text{ car } X\sim\mathcal{P}(\lambda)}$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{\text{série exponentielle}} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}.$$

2) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Pour déterminer la loi de $X+Y$ on utilise la série génératrice : soit $t \in [0,1]$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= e^{-\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)}$$

$$= e^{\lambda\mu(t-1)}$$

On reconnait $G_{\mathcal{P}(\lambda+\mu)}(t)$. Puisque la série génératrice caractérise la loi, on a :

$$X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

<u>À RETENIR</u> : Série génératrice pratique pour caractériser une loi dans $\mathbb{N}$, surtout quand on a des lois de Poisson.

Exercice 27 :

1) Pour caractériser la loi que l'on cherche, on va utiliser la fonction caractéristique.

Soit $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, $t \in \mathbb{R}$:
$X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \quad \text{par indépendance}$$

$$= e^{im_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{im_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}$$

$$= e^{i(m_1+m_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$$

$$= \varphi_{\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t).$$

Puisque la fonction caractéristique caractérise la loi :

$$X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

2) Procédons de la même manière qu'en 1).

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{\alpha X+\beta}(t) = \mathbb{E}(e^{it(\alpha X+\beta)})$$

$$= e^{it\beta}\, \mathbb{E}(e^{it\alpha X})$$

$$= e^{it\beta}\, \varphi_X(t\alpha)$$

$$= e^{it\beta}\, e^{imt\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 t^2}$$

$$= e^{i(\alpha m+\beta)t - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2 t^2}$$

$$= \varphi_{\mathcal{N}(\alpha m+\beta, \alpha^2\sigma^2)}(t).$$

Ainsi, on a $\alpha X+\beta \sim \mathcal{N}(\alpha m+\beta, \alpha^2\sigma^2)$.

3) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varepsilon \perp\!\!\!\perp X$ telle que

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $Y = \varepsilon X$. Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}(\varepsilon X > y)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\varepsilon X > y \mid \varepsilon = 1)$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbb{P}(\varepsilon X > y \mid \varepsilon = -1)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X > y) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(-X > y)$$

Or $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $X \overset{loi}{=} -X$:

$$\mathbb{P}(Y > y) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X > y) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X > y).$$

$$= \mathbb{P}(X > y).$$

Par caractérisation de la loi par les fonctions de répartition :

$$Y \sim X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Donc X et Y sont des gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour conclure, montrons que $X + Y$ ne l'est

pas.

$$\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}((1+\varepsilon)X=0)$$

car $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}((1+1)X=0 \mid \varepsilon=1)$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbb{P}((1-1)X=0 \mid \varepsilon=-1)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}(X=0)}_{=0 \text{ car } X \text{ à densité}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $X+Y$ ne peut être ni gaussienne, ni constante.

À RETENIR: Quand on n'a plus indépendance, on peut souvent bricoler des contre-exemples.